Ecuaciones Diferenciales I Examen X

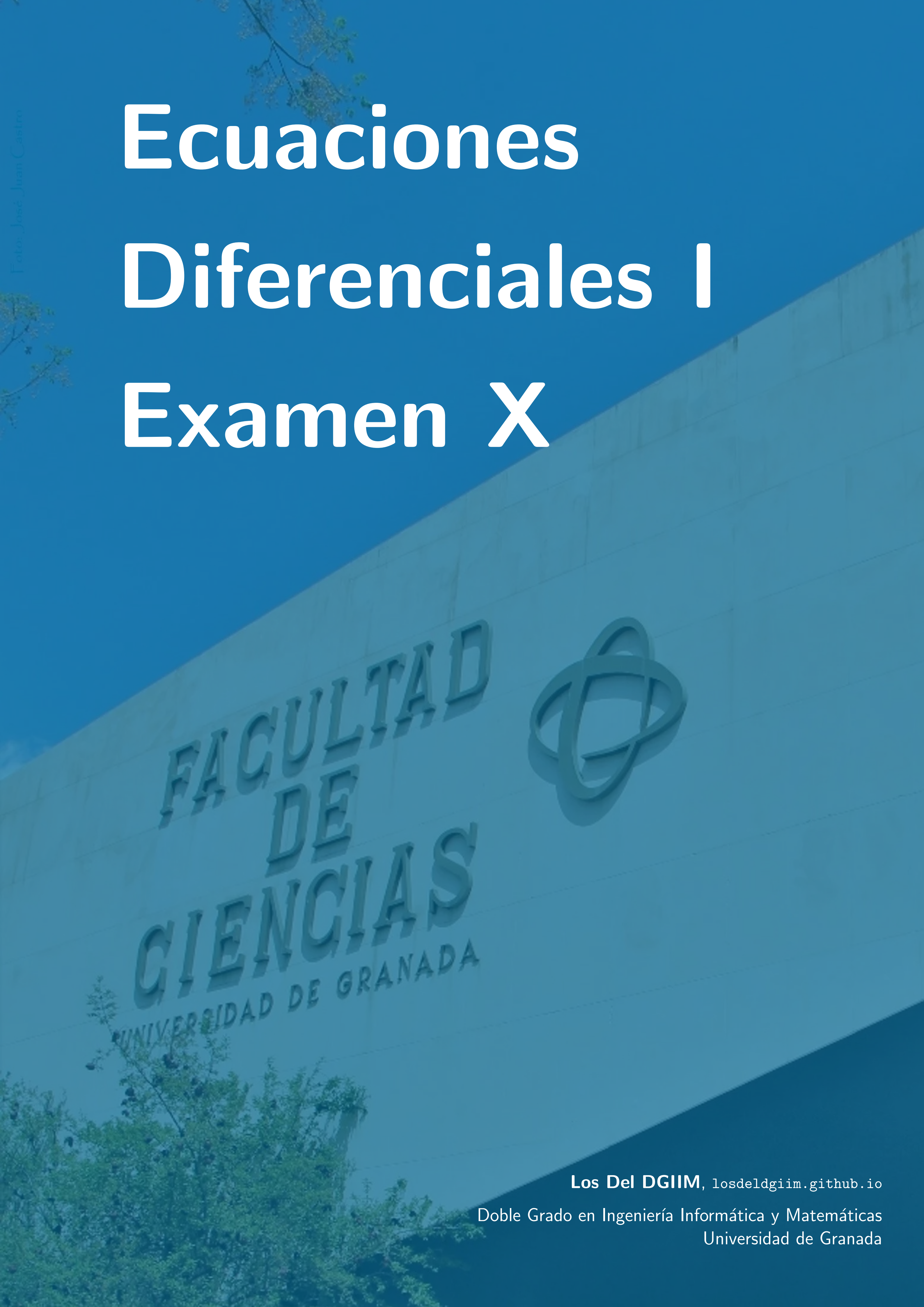

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I Examen X

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2015-16.

Grupo B.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Parcial B.

Fecha 28 de abril de 2016.

Ejercicio 1. Dada la ecuación diferencial

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

con $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$, ¿bajo qué condiciones existe un factor integrante del tipo $\mu(x,y) = m(x+2y)$?

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, un factor integrante $\mu : \Omega \to \mathbb{R}$ para dicha ecuación diferencial es una función de clase $C^1(\Omega)$ que cumple:

- $\mu(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \in \Omega$.
- Al multiplicar por μ la ecuación diferencial, se obtiene una ecuación diferencial exacta. Es decir:
$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}.$$

Desarrollando dichas derivadas parciales, se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} &= \frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot P + \mu \cdot \frac{\partial P}{\partial y} \\
\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} &= \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot Q + \mu \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}
\end{aligned}$$

Por tanto, la condición de exactitud queda:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot P + \mu \cdot \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot Q + \mu \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Empleando que $\mu(x,y) = m(x+2y)$, se tiene que sus derivadas parciales son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y) &= m'(x+2y) \\
\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) &= 2m'(x+2y)
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la condición de exactitud, se obtiene:

$$\begin{aligned}
2m'(x+2y)P(x,y) + m(x+2y)\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= m'(x+2y)Q(x,y) + m(x+2y)\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \\
m'(x+2y)(2P(x,y) - Q(x,y)) &= m(x+2y)\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)
\end{aligned}$$

Imponemos entonces $2P(x,y) - Q(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \in \Omega$. Por ser un factor integrante, $m(x+2y) \neq 0$ para todo $(x,y) \in \Omega$, por lo que la condición de exactitud queda:

$$\frac{m'(x+2y)}{m(x+2y)} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)}{2P(x,y) - Q(x,y)}.$$

EL término izquierdo de la igualdad es función de $x + 2y$. Por tanto, hemos de imponer que el término derecho también lo sea. Es decir, que exista una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x+2y) = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)}{2P(x,y) - Q(x,y)} \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Por tanto, hemos de imponer, en primer lugar, que ese cociente esté bien definido, lo que se garantiza imponiendo $2P(x,y) - Q(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y, en segundo lugar, que exista una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{m'(x+2y)}{m(x+2y)} = f(x+2y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Aunque no se pide, calculemos cómo será entonces el factor integrante. Sean entonces ξ la variable independiente y m la dependiente. Tenemos la ecuación diferencial:

$$\frac{m'}{m} = f(\xi). \qquad \text{con dominio } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

donde hemos supuesto $m(\xi) > 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$ (en caso contrario, obtendríamos otro factor integrante igualmente válido). Esta es una ecuación diferencial de variables separables. Integrando ambos lados de la ecuación, notando por $F(\xi)$ a una primitiva de $f(\xi)$, y considerando constante de integración nula (en caso contrario, obtendríamos otro factor integrante igualmente válido), se tiene:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\,m}{m} &= \int f(\xi)\,d\xi \\
\ln(m) &= F(\xi) \\
m(\xi) &= e^{F(\xi)}
\end{aligned}$$

Por tanto, el factor integrante será:

$$\mu(x,y) = e^{F(x+2y)}$$

Ejercicio 2. Comprueba que la ecuación diferencial

$$\frac{e^x}{y+e^x} + 2x + \frac{1}{y+e^x}y' = 0$$

es exacta. Encuentra la solución que cumple $y(0) = 0$.

Como $y(0) = 0$, tenemos que $y(0) + e^0 = 1$. Por tanto, el dominio de la ecuación diferencial es:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + e^x > 0\}$$

Comprobemos ahora que la ecuación diferencial es exacta. Definimos:

$$\begin{array}{rccc}
P: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& (x,y) & \longmapsto & \dfrac{e^x}{y+e^x} + 2x
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} Q: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{1}{y+e^x} \end{array}$$

Comprobemos si cumplen la condición de exactitud:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{e^x}{(y+e^x)^2} = -\frac{e^x}{(y+e^x)^2} \qquad \forall (x,y)\in\Omega$$

Por tanto, tenemos que es exacta, y además el dominio Ω es estrellado. Para encontrar la solución, buscaremos una función potencial U tal que $\nabla U = (P,Q)$. Integrando la segunda componente de ∇U con respecto a y, obtenemos:

$$U(x,y) = \int Q(x,y)\,dy = \int \frac{1}{y+e^x}\,dy = \ln(y+e^x) + \varphi(x)$$

donde $\varphi : \pi_1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es una función que depende de x y representa la constante de integración. Derivando U con respecto a x, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(\ln(y+e^x)+\varphi(x)) = \frac{e^x}{y+e^x} + \varphi'(x) \\ &= P(x,y) = \frac{e^x}{y+e^x} + 2x \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $\varphi'(x) = 2x$, de donde obtenemos $\varphi(x) = x^2$ (notemos que hemos elegido constante de integración nula, puesto que el potencial es único salvo una constante aditiva). Por tanto, el potencial U es:

$$U(x,y) = \ln(y+e^x) + x^2$$

Por tanto, por la teoría vista en clase, como $Q(0,y(0)) = 1 \neq 0$, la solución de la ecuación diferencial que cumple $y(0) = 0$ viene dada implícitamente por la ecuación:

$$U(x,y) = U(0,y(0)) \Longrightarrow \ln(y+e^x) + x^2 = 0$$

Despejando $y(x)$, obtenemos:

$$y(x) + e^x = e^{-x^2} \Longrightarrow y(x) = e^{-x^2} - e^x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

Ejercicio 3. Demuestra que las funciones $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t^2$ y $f_3(t) = |t|^3 t$ son linealmente independientes en $]-1,1[$.

Tenemos que $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$. Estudiemos f_3. Tenemos que:

$$f_3(t) = \begin{cases} t^4 & \text{si } t \geqslant 0 \\ -t^4 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Vemos que $f_3 \in C(\mathbb{R})$. Además, por el carácter local de la derivabilidad, tenemos que $f_3 \in C^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})$. Para estudiar el caso del origen, calculamos las derivadas de

f_3:

$$f_3'(t) = \begin{cases} 4t^3 & \text{si } t > 0 \\ -4t^3 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$f_3''(t) = \begin{cases} 12t^2 & \text{si } t > 0 \\ -12t^2 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$f_3'''(t) = \begin{cases} 24t & \text{si } t > 0 \\ -24t & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Por tanto, vemos que f_3 es 3 veces derivable en $\mathbb{R}$, aunque tan solo buscábamos las dos primeras derivadas. El Wronskiano de f_1, f_2 y f_3 es, para cualquier $t \in]0,1[$:

$$W(f_1, f_2, f_3)(t) = \begin{vmatrix} 1 & t^2 & t^4 \\ 0 & 2t & 4t^3 \\ 0 & 2 & 12t^2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4t^2 \cdot \begin{vmatrix} t & t \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8t^2(3t - t) = 16t^3 > 0$$

Por tanto, como $\exists t \in]0,1[\subset]-1,1[$ tal que $W(f_1, f_2, f_3)(t) \neq 0$, tenemos que f_1, f_2 y f_3 son linealmente independientes en $]-1,1[$.

Ejercicio 4. En el intervalo $I =]-1,1[$ se dan dos funciones $A \in C^1(I)$, $\beta \in C(I)$ y se define

$$x(t) = 3e^{A(t)} - 2e^{A(t)} \int_0^t e^{-A(s)} \beta(s)\, ds.$$

Encuentra una ecuación lineal de primer orden para la que la función $x(t)$ sea solución.

Veamos en primer lugar que $x \in C^1(I)$. En primer lugar, el primer término del integrando es la composición de dos funciones continuas, por lo que es continuo; mientras que el segundo término es continuo por hipótesis. Por tanto, el integrando es continuo en todo compacto $[0,t] \subset I$; y por el Teorema Fundamental del Cálculo, la integral es de clase C^1 en I. El resto de la expresiónde x es composición, producto y suma de funciones de clase 1, luego $x \in C^1(I)$. Derivando x con respecto a t, obtenemos:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 3A'(t)e^{A(t)} - 2A'(t)e^{A(t)} \int_0^t e^{-A(s)}\beta(s)\, ds - 2e^{A(t)}e^{-A(t)}\beta(t) = \\ &= A'(t)\left(3e^{A(t)} - 2e^{A(t)} \int_0^t e^{-A(s)}\beta(s)\, ds\right) - 2\beta(t) \end{aligned}$$

Usando la definición de $x(t)$, obtenemos:

$$x'(t) = A'(t)x(t) - 2\beta(t)$$

Por tanto, la ecuación diferencial lineal de primer orden cuya solución es $x(t)$ es:

$$x' = A'x - 2\beta \qquad \text{con dominio } I \times \mathbb{R}$$

Notemos además que:

$$x(t) = e^{A(t)} \left(3 + \int_0^t e^{-A(s)}(-2\beta(s))\, ds \right)$$

Posiblemente, al leer el lector la solución de esta forma, recuerde que se trata de la fórmula vista en el Capítulo 2.

Ejercicio 5. Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y con inversa $g = f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ también de clase C^1. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ se define el cambio de variable en el plano $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(t, x) \mapsto (s, y)$ por las fórmulas

$$s = t, \quad y = f(g(x) + \lambda).$$

Demuestra que $\mathcal{G} = \{\varphi_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ es un grupo de difeomorfismos del plano.